东北师范大学主管
吉林省数学会主办
中国期刊全文数据库（CJFD）收录期刊
国际标准连续出版物号：ISSN 1007-872X
国内统一连续出版物号：CN 22-1217/O1

SHUXUE XUEXI YU YANJIU

数学学习与研究

2020.25
邮发代号：12-377

NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM
东北师范大学出版社

数学学习与研究

SHUXUE XUEXI YU YANJIU

旬刊

2020年第25期 2020年11月25日出版

目次

主　任　史宁中

编　委　高夯　马云鹏　王尚志　张英宙　沈呈民　孔凡哲　王继延　熊斌　关成志　景敏　孟祥静　崔安玲　郭清波　刘璇　欧阳新龙　孙孝武　孙延洲　晁振英　郭奕津　张文昌

社　长　吴长安

主　编　陈国良

副主编　袁赵洪

责任编辑　张正吉　郑小媛　曹秋园

美术设计　隋福成

发行主管　吕雪冬　程家强　李天甲

主　管　东北师范大学

主　办　吉林省数学会　东北师范大学数学与统计学院

出　版　数学学习与研究杂志社

地　址　长春市净月开发区金宝街118号

邮　编　130117

电　话　(0431)84568133(赵彦翔)　(0431)84568090(曹秋园)　(0431)85601108(姜鸿飞)　(0431)84568086(袁赵洪)

传　真　(0431)85693386

网　址　www.nenup.com

E-mail　sxxxlw@163.com

印　刷　长春市宏达印务有限公司

邮发代号　12-377

国内统一刊号　CN　22-1217/O1

国际标准刊号　ISSN　1007-872X

广告许可证号　2200004000103

定　价　32.00元

案例剖析 ANLI POUXI

数学核心素养 SHUXUE HEXIN SUYANG

解题技巧与方法 JIETI JIQIAO YU FANGFA

专题研究 ZHUANTI YANJIU

聚焦一题多解样例，培养高职学生创造性数学思维

◎李建明 （兰州现代职业学院，甘肃 兰州 730300）

【摘要】高等数学作为公共基础课程，在诸多领域得到了大量应用，例如经济管理、自然科学、生命科学以及工程技术.但由于高等数学涉及知识点众多，章节之间联系紧密，要求学习者要建立严密的思维方式和习惯，这样才能更好地掌握与应用知识.在高等数学中，一题多解体现了丰富的数学思想，能够帮助学生有针对性地训练数学思维.本次将围绕一题多解样例展开论述，重点分析在高职高等数学中培养学生创造性思维的具体方式，以供参考.

【关键词】高职；高等数学；一题多解；有效路径

一题多解指的是利用差异化的策略解答同一道题.鉴于每个人在思考以及思维层面存在多元化的分析切入点，因此可以建立不同类型的解决路径，所以高职学生在学习高等数学时常会面临一题多解的情形.学习高等数学不仅是掌握解题方法，更重要的是培养学生的数学创新思维，这既是高职教育的要求，也是培养学生数学核心素养的必经之路.具体而言，一题多解广泛存在于各类研究活动以及教育活动之中，极大推动了数学学科的发展，也培养了学生的创造性思维.

一、一题多解在高职高等数学中的重要价值

在高职高等数学中，一题多解已经得到了普遍应用.一题多解的本质是围绕中心原理进行延伸，用不同的方法解决数学问题，这是培养学生发散思维的重要举措.一题多解对学生数学思维的训练极为明显，学生可以在不同的解法中深化对定理的认识.另外，高等数学往往存在大量的公式符号，会让学生产生枯燥感和疲劳感，利用一题多解，可以让学生在同一道题中领悟不同解题思路，进而培养学生的数学创造思维，增加学生的解题成就感.

二、一题多解在高职高等数学中的具体应用

（一）利用一题多解让学生更为深入地感知高数概念

在微积分中，不定积分的重要意义不言而喻.由于不定积分为微分计算的逆计算，和微分计算相比，其难度往往更大.教师在介绍不定积分概念的过程中，通常会对原函数的概念加以阐述.鉴于原函数具有不唯一性，不同原函数之间存在一个常数，所以将带有常数 C 的全部原函数均称作不定积分.但是在实际教学中，部分高职学生对这一概念的理解存在偏差，导致学习效果不理想.

例1　求解不定积分 $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

解析　利用一题多解的思路让学生掌握不定积分的概念，针对该题可以利用三种方式加以解决，具体如下.

第一种解法：借助倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，随后应用第一类换元法，凑微分法，即可解决.

原式 $=\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}(2x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

第二种方法：跳过换元法直接采用凑微分法.

由于 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$，

那么，可以将原式转成为 $\int 2\sin x\mathrm{d}\sin x=\sin^2x+C$.

第三种解法：同样直接采用凑微分法.

设 $\sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}\cos x$，

那么原式 $=-\int 2\cos x\mathrm{d}\cos x=-\cos^2x+C$.

从上面三种方法可知，三种不同的解题思路会有三种不同的结果，这是什么原因？究竟哪一个答案是正确的？通过原函数的定义，可知 $F'(x)=f(x)$，

那么通过验证可知：

$\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'=-\frac{1}{2}(-\sin 2x)\times 2=\sin 2x=2\sin x\cos x$，为被积函数；

另外，$(\sin^2x)'=2\sin x\cos x$，也是被积函数；

$(-\cos^2x)'=-2\cos x(-\sin x)=2\sin x\cos x$，同为被积函数.

所以，上述三种解法均正确，进而可以掌握结果和被积函数之间的实际关系，原函数的导数和被积函数具有相等关系.

另外，通过倍角公式可以推导出：

$-\frac{1}{2}\cos 2x=-\frac{1}{2}(2\cos^2x-1)=-\cos^2x+\frac{1}{2}=-(1-\sin^2x)+\frac{1}{2}=\sin^2x-\frac{1}{2}$.

这意味着，以上三种不同结论的差为一个常数，也进一步体现了原函数的定义：一个函数的原函数并不是唯一的，不同原函数均相差一个常数 C，也显示出对于相同的不定积分试题而言，即使结果形式有所差异，其本质并未改变.所以利用一题多解可以让学生更加深刻地理解原函数以及不定积分的含义.

（二）引导学生活学活用，实现触类旁通

部分学生由于没有深入了解和掌握一元隐函数求导法则，因此刚接触二元隐函数求导会产生消极心理，心生畏惧.针对这一情况，教师为了消除学生的畏惧心理，需要应用一题多解方法，使学生对知识点的掌握更加系统.

例1　令 $y^2=2-xe^y$，那么 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值是多少？

解析　第一种解法：采取直接求导法，将等式的左侧与右侧同时对 x 求导，而 y 需要被视作关于 x 的函数，那么，

$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0-e^y-xe^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

等式变换后，可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{e^y}{2y+xe^y}$.

第二种解法：借助关系式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$.

由于上式中 x，y 无关，

设 $F(x,y)=2-xe^y-y^2$，

由此可得 $F_x=-e^y$，$F_y=-xe^y-2y$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^y}{2y+xe^y}$.

第三种解法：借助微分形式不变形的特点将等号左边和右边予以全微分，同时 x，y 无关，那么

$d(y^2)=d(2-xe^y)$，$2ydy=0-e^ydx-xe^ydy$，

所以 $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{2y+xe^y}$.

由以上三类解题思路，可知对于第一种解题方法而言，应该重点关注 y 与 x 的具体联系，将 y 视作 x 的函数，而在第二种以及第三种解题思路中，x，y 无关. 厘清上述三种不同类型解题方法的核心逻辑才能更好地解决隐函数导数问题，最终为学习二元隐函数求导法创造条件. 所以，笔者会利用二元函数求导案例，引导学生意识到二元隐函数和一元隐函数求导具有相同性质.

例 3　如果 $x+y^3-e^z=2z$，那么请计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值.

解析　第一种解法：采取直接求导法，应该重点分析 x，y，z 之间的关系，即 z 为 x，y 的函数，而 x 与 y 无关.

所以，等式左边和右边均对 x 求导，可得

$1-e^z\times\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial z}{\partial x}$，通过计算得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2+e^z}$，

等式左边和右边均对 y 求导，得到

$3y^2-e^z\times\frac{\partial z}{\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial y}$，最终得出 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2}{2+e^z}$.

第二种解法：借助关系式 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.

此时，可将 x，y，z 三个变量视作独立变量，再将 F 对三个变量求偏导数.

设 $F(x,y,z)=x+y^3-e^z-2z$，

所以可得到 F_x，F_y，F_z 的具体数值，即

$F_x=1$，$F_y=3y^2$，$F_z=-e^z-2$，

那么，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{2+e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3y^2}{2+e^z}$.

第三种解法：直接应用微分法，将 x，y，z 视作独立变量，等式的左、右两边都计算全微分，再运用等式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 确定 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 以及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 的值. 具体过程如下：

$d(x+y^3-e^z)=d(2z)$，

$dx+3y^2dy-e^zdz=2dz$，

$dz=\frac{1}{2+e^z}dx+\frac{3y^2}{2+e^z}dy$，

那么，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2+e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2}{2+e^z}$.

有上述案例中，一题多解在高等数学中得到了广泛应用，特别是在理解重要概念以及难点概念时，一题多解能够让学生串联已学知识和新知识，并在其中展开类比以及推广，这可以有效培养学生独立思考的能力以及创新意识，也为后续学习高等数学奠定良好基础.

（三）一题多解在证明题中的应用

例 4　已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续并且单调不增，请你证明如果 $0\leqslant\mu\leqslant1$，$\int_0^\mu f(x)dx\geqslant\mu\int_0^1 f(x)dx$.

解析　本题可以通过多种方法加以理解，具体可以从函数单调性、定积分换元法、积分中值定理、定积分的性质以及微分中值定理等角度切入证明.

证明一：假设 $F(\mu)=\int_0^\mu f(x)dx-\mu\int_0^1 f(x)dx$，

由题设条件，可知

$F(1)=F(0)=0$，

$F'(\mu)=f(\mu)-\int_0^1 f(x)dx$.

由此可见，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上符合罗尔定理，因此，有 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，那么 $f(\xi)=\int_0^1 f(x)dx$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续并且单调不增，所以可分成两种情况，即

如果 $\mu>\xi$，那么 $F'(\mu)=f(\mu)-\int_0^1 f(x)dx=f(\mu)-f(\xi)\leqslant0$；

如果 $\mu<\xi$，那么 $F'(\mu)=f(\mu)-\int_0^1 f(x)dx=f(\mu)-f(\xi)\geqslant0$.

因此，ξ 为 $F(\mu)$ 的最大值对应的点，所以 $F(\mu)$ 在 $[0,1]$ 内的最小值是 $F(1)=F(0)=0$，所以 $F(\mu)\geqslant0$，原不等式得以证明.

证明二：可以把问题不等式转变成变上限积分，随后借助函数单调性的性质来证明原式，例如需要证明 $\int_0^\mu f(x)dx\geqslant\mu\int_0^1 f(x)dx$，就相当于要验证 $\frac{\int_0^\mu f(x)dx}{\mu}\geqslant\frac{\int_0^1 f(x)dx}{1}(\mu\geqslant0)$.

假设 $F(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\mu}$，所以只要验证 $F(x)$ 单调不增即可，而 $F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^1 f(t)dt}{x^2}$，

由于 $f(x)$ 连续，借助积分中值定理，可得

$F'(x)=\frac{xf(x)-xf(\xi)}{x^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x}$，$0\leqslant\xi\leqslant x$.

而由于 $f(x)$ 单调不增，因此 $f(\xi)\geqslant f(x)$，所以 $F'(x)\leqslant0$，意味着 $f(x)$ 单调不增，那么，当 $0<\mu\leqslant1$，存在 $F(\mu)\geqslant F(1)$，如果 $\mu=0$，那么原式即可成立.

证明三：设 $F(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\mu}$，

那么 $F'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\frac{\int_0^x f(x)dt-\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\frac{\int_0^x [f(x)-f(t)]dt}{x^2}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续并且单调不增，那么 $f(x)\leqslant f(t)$，所以 $F'(x)\leqslant0$，即 $F(x)$ 单调不增，因此原不等式得以证明.

三、结束语

综上所述，一题多解贯穿高等数学教学的各个环节，掌握一题多解可以更好地掌握与理解高等数学的概念以及相应的解法，对于提升解题效率极具价值. 因此，教师在高等数学教学时，应该有针对性地进行一题多解的专项训练.